دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسـئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسـئلهٔ جدید مطرح می‌شـود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیـه می‌کنیم که به‌طور فعال به حـل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسـئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدیـد باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌هـا و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواسـتید از طریق پسـت الکترونیکـی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسـخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

و اما در سـال تحصیلی گذشـته آقایان محمد *طبیعی* و محمود *ندایی‌لمر* با بیشـترین حل مسئله پیشتاز پاسخ‌گویی به مسـائل پای تخته بودند که هدیهٔ نفیسی برای ایشان از طرف مجلهٔ برهان ارسال خواهد شد.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسـخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۱۱. اگر همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت‌سـر هم بنویسیم، چند رقم زوج و چند رقم فرد نوشته خواهد شد؟

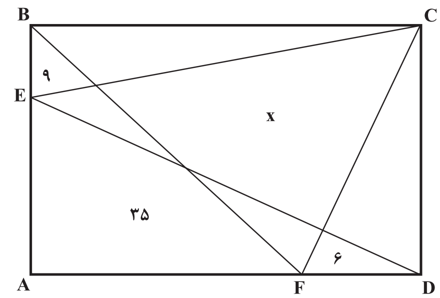
۲۱۲. مکعبی به ضلع $\frac{۲}{۳}\text{m}$ را روی مکعبی به ضلع ۱m قرار داده‌ایم و سـطح بیرونی حجم حاصل را رنگ کرده‌ایم. سطح رنگ شده چه مساحتی دارد؟

۲۱۳. رقم یک در عدد $۲^{۲۰۰۹}$ چندبار ظاهر می‌شود؟

۲۱۴. شش سخنران در سمیناری سخنرانی خواهند کرد. می‌خواستیم ترتیب سخنرانی‌ها را طوری انتخاب کنیم که سخنران A قبل از سخنران B و سخنران B قبل از سـخنران C صحبت کننـد. چند جور می‌توان برنامهٔ سخنرانی‌ها را تنظیم کرد؟

۲۱۵. در شـکل پاره‌خط‌هـای DE، CE، BF و CF مسـتطیل را به ناحیه‌های کوچک‌تر افراز کرده‌اند

که مساحت سه‌تا از ناحیه‌ها در شکل مشخص شده است. مساحت ناحیه‌ای را که با حرف x مشخص شده است، بیابید.



۲۱۶. در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور زوج است؟

۲۱۷. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ مفروض است. ثابت کنید این عدد مضرب ۷ است اگر و تنها اگر عدد $\overline{abcd}-2\times e$ مضرب ۷ باشد.

۲۱۸. همهٔ اعداد حقیقی x را بیابید، به‌طوری که: $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]=4$. ([x] همان جزءصحیح x است.)

۲۱۹. ثابت کنید:

$$\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۲۲۰. روی ۲۰۰۹ کارت اعداد طبیعی متفاوتی نوشته شده‌اند، به‌طوری که مجموع آن‌ها برابر است با: ۲۰۲۰۰۴۹. عدد وسط چه عددی است؟

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۸۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n!\ge 2^{n-1}$.

نامساوی را به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. برای n=1 حکم برقرار است ($2^0\ge 1!$). فرض کنید حکم برای n=k برقرار باشد، یعنی: $k!\ge 2^{k-1}$. دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب کنید. داریم: $2k!\ge 2^k$. از طرف دیگر: $(k+1)!\ge 2k!$. در نتیجه: $(k+1)!\ge 2^k$. پس حکم برای n=k+1 نیز برقرار است.

۱۸۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $2^{2^n}-1$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

دو روش برای اثبات وجود دارد: روش اول استقرا است که آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم. روش دوم به کمک هم‌نهشتی است.

$$2^{2^n}-1\overset{3}{\equiv}(-1)^{2^n}-1\overset{3}{\equiv}1-1\overset{3}{\equiv}0\Rightarrow 3\mid 2^{2^n}-1$$

۱۸۳. r عددی حقیقی است، به‌طوری که $r+\frac{1}{r}$ عددی صحیح است. ثابت کنید $r^n+\frac{1}{r^n}$ به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ عددی صحیح است.

با استقرای قوی حکم را ثابت می‌کنیم. حکم برای n=1 برقرار است. همچنین، با توجه به تساوی $(r+\frac{1}{r})^2=r^2+\frac{1}{r^2}+2$، نتیجه می‌شود حکم برای n=2 نیز برقرار است. حال فرض کنید حکم برای همهٔ مقادیر کوچک‌تر از k برقرار باشد. از تساوی زیر حکم برای n=k به‌دست می‌آید:

$$r^k+\frac{1}{r^k}=(r^{k-1}+\frac{1}{r^{k-1}})(r+\frac{1}{r})-(r^{k-2}+\frac{1}{r^{k-2}})$$

۱۸۴. n خط راست، صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

با استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم تعداد ناحیه‌ها برابر است با: $S_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$. حکم برای n=1 برقرار است و با رسم یک خط راست دو ناحیه پدید می‌آید. فرض کنید حکم برای n=k برقرار باشد. خط (k+1)-ام، k خط قبلی را در k نقطهٔ تقاطع جدید قطع می‌کند و خود به k+1 قسمت تقسیم می‌شود. دو ناحیه‌ای که در دو طرف هر کدام از این قسمت‌ها قرار دارند، قبل از رسم خط (k+1)-ام یک ناحیه بوده‌اند. در نتیجه: $S_{k+1}=S_k+(k+1)$. چون: $S_k=1+\frac{k(k+1)}{2}$، رابطهٔ $S_{k+1}=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ به‌دست می‌آید.

۱۸۵. ثابت کنید در بسط عبارت $(1+x+x^2)^n$، حداقل یکی از ضرایب زوج است.

این مسئله برای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از

یـک برقرار اسـت. حکم را بـا اسـتقرای ریاضی ثابت می‌کنیـم. بـرای $n=2$ حکـم برقـرار اسـت، چـون:

$$(1+x+x^2)^2 = 1+2x+3x^2+2x^3+x^4.$$

فـرض کنیـد حکـم بـرای $n=k$ برقرار باشـد و

$$(1+x+x^2)^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k}$$

کـه در آن ضرایـب a_1 و a_{2k} برابـر یـک هسـتند. بـا فـرض $x=1$، نتیجـه می‌شـود مجمـوع ضرایب برابـر اسـت بـا: 3^k. در نتیجـه ضرایـب a_1 تـا a_{2k-1} نمی‌تواننـد همگـی زوج باشـند. از تسـاوی:

$$(1+x+x^2)^{k+1} = (1+x+x^2)(1+a_1x+\dots+a_{2k-1}x^{2k-1}+x^{2k})$$

نتیجه می‌شـود: اگر a_1 فـرد باشـد، آن‌گاه ضریب x در بسـط $(1+x+x^2)^{k+1}$ زوج اسـت. پس فرض کنید a_1 زوج اسـت. اگر a_2 فرد باشـد، ضریب x^2 در بسـط $(1+x+x^2)^{k+1}$ که برابر اسـت با $1+a_1+a_2$، عددی زوج خواهد شـد و حکم برقرار اسـت. پس فرض کنید a_2 زوج اسـت. حال در ضرایب $a_1, a_2, a_3, \dots$، اولین ضریب فرد را در نظر بگیرید. فرض کنید a_i فرد باشد $(i \geq 3)$. چون ضریب x^i در بسـط $(1+x+x^2)^{k+1}$ برابر اسـت با: $a_{i-2}+a_{i-1}+a_i$. در نتیجـه این ضریب زوج خواهد بود و حکم برای $k+1$ نیز برقرار است.

۱۸۶. با فرض $a,b,c > 0$ ثابت کنید:

$$\mathbf{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) \geq 9a^2b^2c^2}$$

بـا سـاده کـردن نامسـاوی، بـه نامسـاوی $a^4bc+ab^4c+abc^4+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geq 6a^2b^2c^2$ می‌رسـیم. حال از نامسـاوی $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ استفاده می‌کنیم. داریم: $a^4bc+b^3c^3 \geq 2a^2b^2c^2$ و به‌طور مشابه: $ab^4c+a^3b^3 \geq 2a^2b^2c^2$ و: $abc^4+a^3b^3 \geq 2a^2b^2c^2$. بـا جمع این سه نامساوی حکم به‌دست می‌آید.

۱۸۷. با فرض $a,b,c \geq 0$ ثابت کنید:

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

دو طرف نامسـاوی را به توان ۲ می‌رسانیم و ساده می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

مشـابه سـؤال قبـل، بـا جمـع سـه نامسـاوی $a+b \geq 2\sqrt{ab}$، $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ و $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ به حکم می‌رسیم.

۱۸۸. a، b و c سه عدد طبیعی هستند، به‌طوری‌که $a^2+b^2=c^2$. ثابت کنید ab مضرب ۳ است.

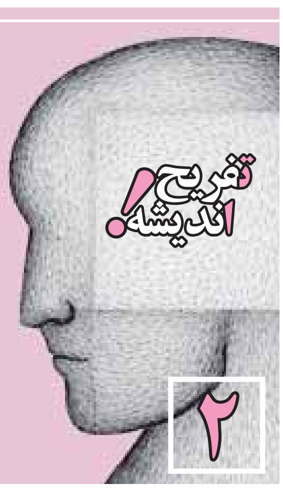
(برهـان خلـف). فـرض کنیـد a و b هیچ‌کـدام مضرب ۳ نیسـتند، پـس: $a=3k\pm1$ و $b=3k'\pm1$. مربع ایـن دو عدد بـه فـرم $3m+1$ خواهد بـود. در نتیجه: $a^2+b^2=3m_1+1+3m_2+1$. یعنی c^2 باید به فرم $3m+2$ باشد که تناقض اسـت. (مربع هر عدد صحیح یا به فرم $3k$ است یا $3k+1$).

۱۸۹. ثابت کنید $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$ هیچ‌وقت صحیح نیست.

اگر کسـرها را جمـع کنیم، مخـرج حاصل جمع کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱ تا n خواهد بود که عددی زوج اسـت. از طرف دیگر، در صورت، n جمله خواهیم داشـت که فقط یکی از آن‌ها فرد اسـت. این جملهٔ فرد مربوط به کسری است که در مخرج، بزرگ‌ترین توان ۲ را دارد. در نتیجه، حاصل، کسـری است با صورت فرد و مخرج زوج و نمی‌تواند صحیح باشد.

۱۹۰. اگـر p و p^2+2 هر دو اول باشـند، ثابت کنید p^3+2 نیز اول است.

اگـر $p>3$، آن‌گاه: $p=3k\pm1$. در نتیجه p^2 به فرم $3m+1$ خواهد بود. پس p^2+2 مضرب سه خواهد شد که تناقض است. پس: $p=2$ یا $p=3$. با بررسی این دو، نتیجه خواهد شـد که تنها $p=3$ صحیح است و در این حالت p^3+2 برابر است با ۲۹ که عددی اول است.



از یک خواهر و برادر پرسـیدند کدام‌یک مسـن‌تر اسـت. برادر گفـت: من مسـن‌تر هسـتم و خواهـر گفت: من جوان‌ترم. اگر بدانیم لااقل یکی از آن‌ها دروغ گفته، چه کسی مسن‌تر است؟